

# Nucléation chaotique à partir de bords

M. Argentina, P. Coulet  
*Institut du Non-linéaire de Nice*  
1361 route des Lucioles, 06560 Valbonne  
e-mail : argentin@inln.cnrs.fr

## 1 Introduction

Le processus de nucléation joue un rôle important dans le mécanisme de changement brutal de phase. Dans la plupart des cas, la nucléation est associée à la formation de bulles de l'état le plus stable qui envahit ensuite tout le domaine. La nucléation est induite en général par des perturbations stochastiques. Cependant, les frontières et les impuretés jouent un rôle important dans le processus de nucléation. En particulier les bulles naissent sur les bords où les inhomogénéités tendent à favoriser la création de l'état le plus stable. Dans la plupart des cas, ces bulles se détachent et sont transportées loin de l'endroit où elles sont créées. Ce mécanisme peut être responsable de l'émission périodique des bulles, comme, par exemple, l'émission périodique de vortex dans un écoulement superfluide situé en aval d'un cylindre [1]. Dans un contexte différent, l'émission périodique d'ondes chimiques à partir des bords du réacteur [2] constitue un autre exemple d'un phénomène de nucléation. Le processus d'émission peut devenir irrégulier, comme par exemple l'émission chaotique de gouttes observée sur un robinet [3]. Pour illustrer le processus de nucléation à partir d'un bord, nous étudions une ligne de jonctions Josephson imparfaites. Et, en s'appuyant sur des considérations géométriques, un modèle est présenté.

## 2 Nucléation à partir d'un bord

Pour illustrer le mécanisme de nucléation périodique d'onde à partir d'un bord, nous étudions une ligne semi-infinie de jonctions de Josephson imparfaites [4], qui est décrite par l'équation :

$$\partial_t^2 \theta + \alpha \partial_t \theta + \sin \theta = \Omega + \partial_{xx} \theta + \beta \partial_{xxt} \theta, \quad (1)$$

où  $\theta$  représente la phase de la jonction,  $\alpha$  la dissipation due aux électrons qui ne forment pas de paires de Cooper,  $\Omega$  un courant électrique extérieur, et  $\beta$  une dissipation due à la résistance du courant surfacique qui naît dans l'épaisseur de London. Enfin nous supposons que  $x \in [0, \infty[$ .

Dans un premier temps, nous supposons que ce système est fortement dissipatif, c'est à dire  $\alpha$  grand. Après un changement d'échelle en temps, nous obtenons :

$$\partial_T \theta = -\sin \theta + \Omega + \partial_{xx} \theta = -\frac{\delta F}{\delta \theta}, \quad (2)$$

où  $F = \int_0^\infty dx (-(\Omega + \cos(\theta)) + \frac{1}{2} \partial_x \theta^2)$  définit une énergie libre du problème. Lorsque  $\Omega \neq 0$ , cette fonctionnelle ne possède pas de minimum absolu, et les trajectoires non bornées deviennent ainsi des solutions périodiques (grâce à la périodicité de la phase). Les solutions homogènes disparaissent par une bifurcation noeud-selle quand  $\Omega = 1$ . Cette bifurcation crée de ce fait des oscillations homogènes dont la période diverge au seuil comme  $(\Omega - 1)^{-\frac{1}{2}}$ .

Nous imposons comme conditions limites:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \partial_x \theta = 0$  et  $\partial_x \theta(0) = \phi$ . Les solutions stationnaires de l'équation (2) sont obtenues à l'aide de :

$$\partial_{xx} \theta = -\Omega + \sin \theta, \quad (3)$$

Les solutions stationnaires de l'équation 3 qui satisfont les conditions limites sont définies par :

$$\Phi_x (W_s(\theta_{A,B}) \cap \Lambda), x > 0,$$

où le flot  $\Phi_x$  est le flot de l'Eq. (3) et  $W_s(\theta_{A,B})$  est la variété stable des points fixes  $\theta_A = -\arcsin \Omega$ , et  $\theta_B = \theta_A + 2\pi$ ; enfin  $\Lambda$  est la ligne horizontale  $\partial_x \theta(0) = \phi$ .

Le comportement du système dépend fortement du signe du flux  $\Phi$ . En effet, pour des valeurs positives du flux, l'unique solution stable est  $\theta_{III}$  (voir fig. (1.a)). Cette solution existe pour toutes les valeurs de flux positives. Le flux négatifs sont plus intéressants car déstabilisant. Si  $-\phi_c \leq \phi \leq 0$ , où  $\phi_c = 2\sqrt{\Omega(\arcsin(\Omega) - \pi/2) + \sqrt{1 - \Omega^2}}$ , il existe deux états inhomogènes stationnaires  $\theta_I$  et  $\theta_{II}$  (voir fig. (1.b)). Quand le flux tend à être nul, les deux solutions tendent respectivement vers  $\theta_I = \Gamma(x), x > 0$  et  $\theta_{II} = \theta_A$ , où  $\Gamma(x)$  est la solution homocline qui est associée au point selle  $\theta_A$ . Le spectre de la solution homogène n'est constitué que de modes étendus stables : par un argument de continuité, nous déduisons que  $\theta_{II}$  est stable tant que  $-\phi_c \leq \phi \leq 0$ . Lorsque  $\phi = -\phi_c$ , les deux solutions  $\theta_I$  et  $\theta_{II}$  disparaissent par une bifurcation noeud-selle : la solution  $\theta_I$  est donc une solution instable dont le spectre possède une unique valeur propre positive. La variété stable de cette dernière solution peut ainsi être considérée comme une séparatrice : sa codimension étant égale à 1, elle sépare en deux le portrait de phase de l'E.D.P.. De ce fait, nous appelons la solution  $\theta_I$  la solution de nucléation car elle permet la transition de l'état  $\theta_{II}$  à l'état  $\theta_{II} + 2\pi$ , qui est énergétiquement plus favorable [5].

Si nous perturbons l'état stable  $\theta_{II}$ , avec une amplitude ne permettant pas de traverser cette barrière, le système relaxe vers l'état  $\theta_I$ . En revanche, dès que l'amplitude devient suffisamment grande, un front est émis à partir du bord et permet la transition vers l'état moins coûteux énergétiquement  $\theta_{II} + 2\pi$ . Nous pouvons de ce fait reproduire qualitativement le portrait de phase de l'équation aux dérivées partielles (voir fig. (2)).

Quand  $\phi = -\phi_c$ , les deux uniques solutions stationnaires disparaissent. Avant la bifurcation la variété instable du point selle  $\theta_I$  entre dans la variété stable du point stable  $\theta_{II}$ . Nous déduisons ainsi que la disparition des états stationnaires entraîne la création d'un état périodique par la bifurcation d'Andronov noeud-col [6]: le bord émet des kinks régulièrement. Un temps caractéristique  $T$ , peut être associé au temps séparant deux émissions successives de kinks qui diverge au seuil de la bifurcation comme  $T \sim (\phi_c - \phi)^{-1/2}$ , comportement qui est observée numériquement (voir fig. (3)).

### 3 Nucléation chaotique à partir d'un bord

Cette analyse devient plus compliquée lorsque les effets inertiels sont pris en compte, en particulier quand la dissipation du système est faible; puisque le retour vers les états stables peuvent se faire de manière oscillante. L'analyse des temps d'émissions successifs en fonction du paramètre de contrôle  $\phi$  montre clairement un caractère apériodique de l'émission (voir fig. (4.a)). Pour une valeur du flux donné, le tracé des  $(n+1)^{iemes}$  ièmes temps d'émission en fonction des  $n^{iemes}$  démontre la nature déterministe du comportement (voir fig. (4.b)).

Notre interprétation (basée sur l'observation numérique) est la suivante : l'émission d'un kink est accompagnée d'une oscillation amortie du bord qui agit comme un effet de mémoire

pour l'émission du kink suivant. Pour confirmer cette observation nous avons reconstruit l'attracteur de l'E.D.P. à l'aide de la méthode des délais, en mesurant la projection de la phase de la jonction au bord de domaine. (voir fig. (5)). Comme soupçonné, cet attracteur possède une topologie compatible avec celui obtenu par une bifurcation d'Andronov noeud-col, avec un retour à l'équilibre oscillant.

Cette observation numérique peut être comprise à l'aide d'un modèle simple (voir fig. (6)). Près de la bifurcation noeud-selle, le flot peut être modélisé par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dZ}{dt} = \epsilon + Z^2 \\ \frac{dA}{dt} = (-\lambda + i\omega)A \end{cases} \quad (4)$$

avec  $A = X + iY$ . Pour des valeurs négatives du paramètre  $\epsilon$ , le flot possède deux points fixes  $Z_{\pm} = \pm\sqrt{\epsilon}$ ,  $A = 0$ , qui modélisent les deux solutions stationnaires  $\theta_I$  et  $\theta_{II}$  ( $\epsilon = \phi_c - \phi$ ). Quand  $\epsilon$  devient positif les deux points fixes disparaissent. Nous supposons qu'il existe un mécanisme de ré-injection. De plus, puisque nous sommes proches de la bifurcation, la trajectoire reste longtemps dans le voisinage où les deux points fixes ont disparu. Afin de calculer ce temps caractéristique, nous définissons deux plans  $\Pi_0$  ( $Y = C$ ) et  $\Pi_1$  ( $Z = D$ ) (voir fig. (6.c)). Le temps  $T_i$  nécessaire pour aller du plan  $\Pi_0$  au plan  $\Pi_1$  est donné par :

$$T_i = 1/\sqrt{\epsilon} \left( \arctan \frac{D}{\sqrt{\epsilon}} - \arctan \frac{Z_i}{\sqrt{\epsilon}} \right).$$

Pendant cet intervalle de temps, les variables  $X$  et  $Y$  obéissent au flot de l'eq. (4). La modélisation de fonction de retour dans le plan  $\Pi_0$  peut être définie, sans perte de généralité, par:  $X_{i+1} = Y'$  and  $Z_{i+1} = X'$ . Nous obtenons ainsi:

$$\begin{aligned} X_{i+1} &= (-C \sin \omega T_i + X_i \cos \omega T_i) e^{-\lambda T_i} \\ Z_{i+1} &= (C \cos \omega T_i + X_i \sin \omega T_i) e^{-\lambda T_i} \\ T_i &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \left( \arctan \frac{D}{\sqrt{\epsilon}} - \arctan \frac{Z_i}{\sqrt{\epsilon}} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

où les variables  $X_i$  et  $Z_i$  décrivent la dynamique près du bord du domaine. Ce modèle géométrique présente des analogies fortes avec le modèle de Silnikov de la bifurcation homocline [6,7]. Pour cette dernière, dans le cas où la courbe homocline est stable, aucun comportement chaotique n'est attendu dans le voisinage de la bifurcation. Cependant, loin du seuil peuvent apparaître des dynamiques chaotiques. Nous nous attendons à observer qualitativement cette même caractéristique pour le modèle 5 (voir fig. (7)). Ce modèle, bien que simple, semble bien représenter qualitativement la dynamique de l'émission chaotique d'ondes à partir d'un bord.

Ce mécanisme semble générique a a été observé aussi dans un milieu excitable semi infini et monodimensionnel [8]. De la même manière, les mappings du modèle construit sur des arguments géométriques semblent aussi bien représenter la dynamique de l'émission chaotique de gouttes à l'extrémité d'un robinet, aussi bien sur un niveau expérimental que sur une approche numérique [3,9].

### Références :

- [1] Pour une revue, voir P. G. Drazin et W. H. Reid, Hydrodynamic stability, Cambridge University Press, Cambridge, 1981. Et aussi T. Frish, Y. Pomeau et S.Rica, Phys. Rev. Lett. 1, 1644, (1992) . V. Hakim, Phys.Rev. E, 5,3 2835, 1997.
- [2] A. N. Zaikin et A. M. Zhabotinskii, Nature **225**, 535, 1970.
- [3] J. C. Sartorelli, W. M. Gonçalves et R. D. Pinto, Crisis and intermittency in a leaky-faucet experiment, Phy. Rev. E **49**, 3963, 1994.

- [4] Pour une revue, A. Barone et G. Paterno, *Physics and Applications of the Josephson Effect*, J. Wiley, New-York, 1982.
- [5] M. Argentina, P. Couillet et L. Mahadevan, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 2803, 1997. M. Argentina, P. Couillet et V. Krinsky (submitted).
- [6] A. A. Andronov et L. Pontyagin, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 14, 247, 1937. See also A. A. Andronov et al, *Theory of Bifurcation of Dynamical Systems on the plane*, Israel Program For Sci. Trans. (1971).
- [7] J. Guckenheimer, P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields*. Appl. Math. Sci. 41, Springer, New-York (1983). L. P. Silnikov, *Sov. Math. Dokl.* **6**, 163, 1965.
- [8] M. Argentina et P. Couillet, (soumis).
- [9] C. Riera, P. Couillet, L. Mahadevan (soumis).

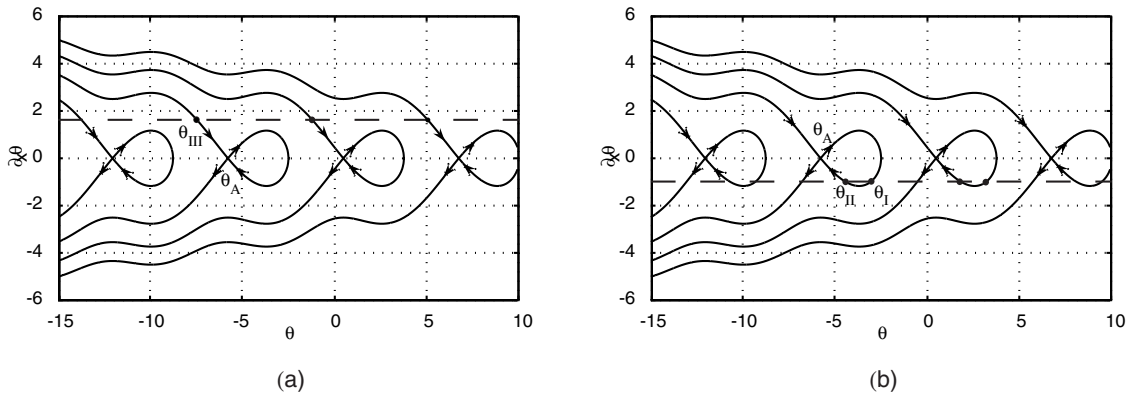


Figure 1: Les solutions stationnaires du système (2). (a) Quand le flux est positif, nous avons qu'un seul état fixe stable :  $\theta_{III}$  (modulo  $2\pi$ ). (b) Quand le flux est négatif, nous avons deux solutions stationnaires  $\theta_I$  (instable) et  $\theta_{II}$  (stable).

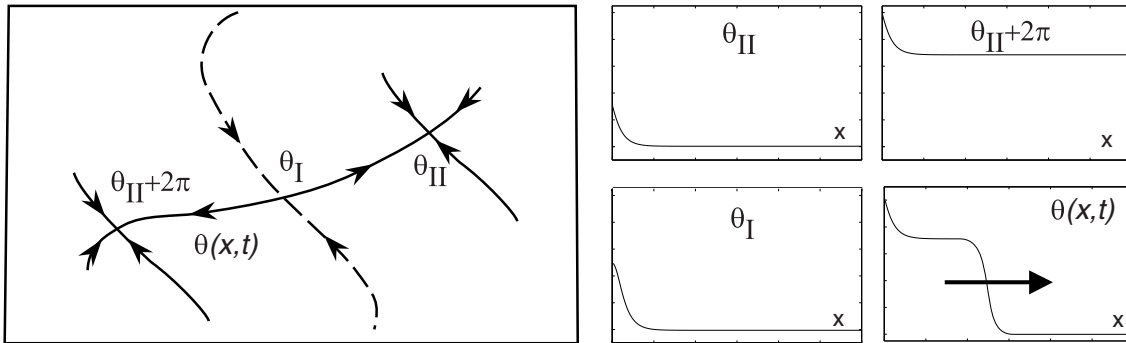


Figure 2: Portrait de phase qualitatif de l'équation (2) quand  $-\phi_c < \phi < 0$ . Tant que l'état métastable  $\theta_{II}$  est perturbé avec une amplitude ne permettant pas de franchir la séparatrice (tracée en pointillés), il n'y a pas d'émission de front. Quand cette barrière est franchie, un front est émis permettant la transition vers l'état  $\theta_{II} + 2\pi$ . Nous avons aussi tracé quelques profil spatial en différents endroits du flot.

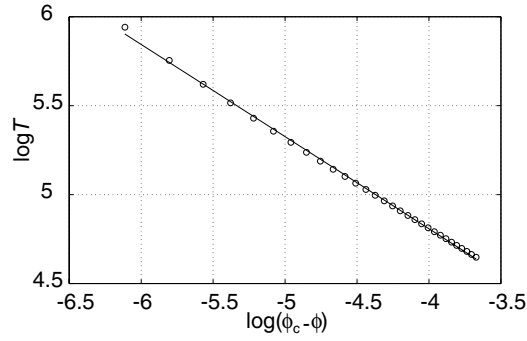


Figure 3: Tracé log-log, montrant la divergence algébrique de la période d'émission au seuil de la transition,  $\log T = a \log(\phi_c - \phi) + b$ , avec  $a = -0.49$ . ( $\Omega = 0.9$ ,  $\alpha = 1$ , et  $\beta = 1$ ).

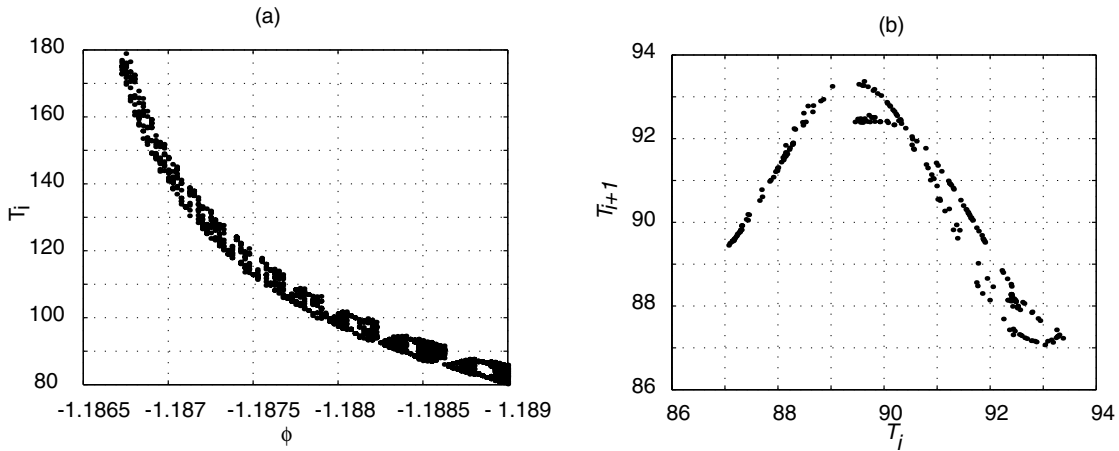


Figure 4: (a) Temps  $T_i$  séparants deux émissions de kinks en fonction du paramètre de contrôle  $\phi$ . (b) Mapping des temps successifs de  $T_{i+1}$  en fonction de  $T_i$ , pour  $\mu = -1.1885$ . Paramètres:  $\alpha = 10^{-3}$ ,  $\Omega = 0.5$ ,  $\beta = 1$ .

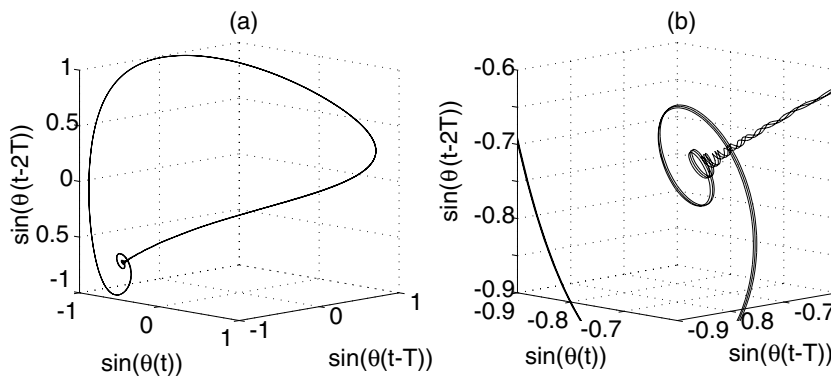


Figure 5: Projection de l'attracteur de l'équation aux dérivées partielles quand des pulses sont émis des bords. (a) Ensemble de l'attracteur. (b) Détails de l'attracteur montrant le caractère apériodique de l'émission. ( $\alpha = 10^{-3}$ ,  $\Omega = 0.5$ ,  $\beta = 1$ , and  $\phi \simeq -1.1885$ )

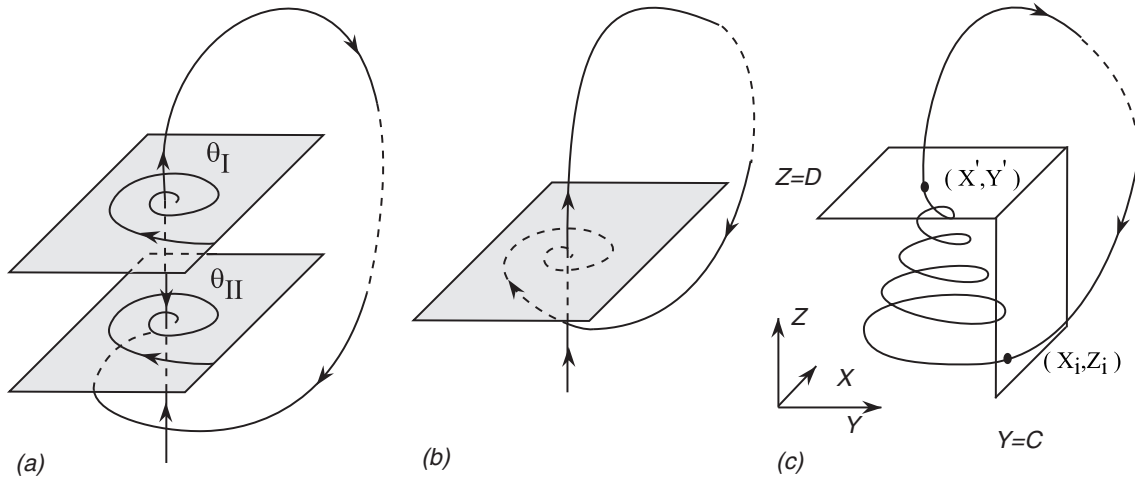


Figure 6: Portraits de phase qualitatifs de l'E.D.P. quand l'inertie du système est prise en compte. (a) Avant la bifurcation lorsque  $\epsilon < 0$ , nous avons deux solutions stationnaires; (b) Au seuil quand  $\epsilon = 0$ , les deux solutions disparaissent par bifurcation noeud-selle; (c) Après la bifurcation, un attracteur de type Andronov-Silnikov apparaît.

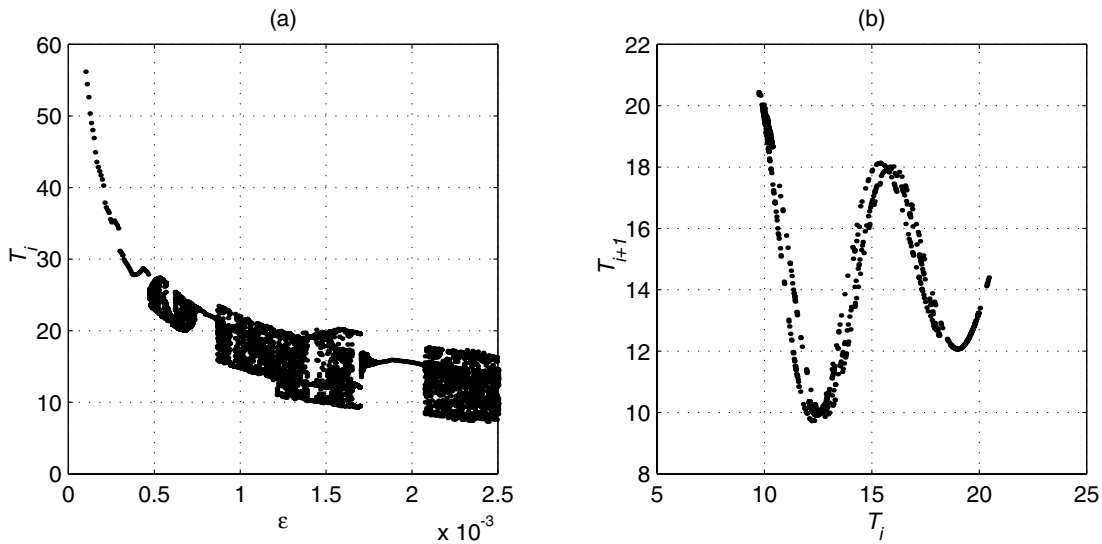


Figure 7: (a) Cascade de bifurcations du modèle (5) quand le paramètre de contrôle  $\epsilon$  est changé ( $C = D = 0.2\sqrt{\epsilon}$ ,  $\omega = 1$ ,  $\lambda = 0.1$ ); (b) Section de Poincaré des intervalles de temps successifs séparant deux émissions  $\epsilon = 15.10^{-3}$ .